

Interrogation n°5 – Développements limités

(sujet A) **Corrigé**

NOM : Prénom : Note :

1. Donner le $DL_6(0)$ de $\tan(x^2)$ et le $DL_3(0)$ de $\arctan(2x)$.

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^3) \text{ donc } \tan(x^2) = x^2 + \frac{x^6}{3} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^6)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^3) \text{ donc } \arctan(2x) = 2x - \frac{8}{3}x^3 + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^3)$$

2. Donner le $DL_3(0)$ de $\sqrt[3]{1+x}$.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1+x} &= (1+x)^{\frac{1}{3}} \\ &= 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{2 \times 3}x^3 + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^3) \\ &= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{9} \times \frac{5}{3}x^3 + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^3) \\ &= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^3)\end{aligned}$$

3. Donner le $DL_{13}(0)$ de $x^3 \cos(x^2)$.

On a

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^5)$$

donc

$$\begin{aligned}x^3 \cos(x^2) &= x^3 \left(1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^{10}) \right) \\ &= x^3 - \frac{x^7}{2} + \frac{x^{11}}{24} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^{13})\end{aligned}$$

Interrogation n°5 – Développements limités

(sujet B) **Corrigé**

NOM : Prénom : Note :

1. Donner le DL₃(0) de $\sqrt{(1+x)^3}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{(1+x)^3} &= (1+x)^{\frac{3}{2}} \\ &= 1 + \frac{3}{2}x + \frac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}}{2}x^2 + \frac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2})}{2 \times 3}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ &= 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\end{aligned}$$

2. Donner le DL₄(0) de $\ln(1-x)$ et le DL₃(0) de 2^x .

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$$

donc

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$$

$$2^x = e^{x \ln 2} = e^X \text{ avec } X = x \ln 2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0, \text{ donc}$$

$$\begin{aligned}2^x &= 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(X^3) \\ &= 1 + (\ln 2)x + \frac{(\ln 2)^2}{2}x^2 + \frac{(\ln 2)^3}{6}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\end{aligned}$$

3. Donner le DL₇(0) de $\frac{\sin(x^2)}{2x^2}$.

L'énoncé comportait une erreur : sur votre copie il faut multiplier le DL final par x pour retrouver celui du corrigé :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o_{x \rightarrow 0}(x^5)$$

donc

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} + o_{x \rightarrow 0}(x^{10})$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x^2)}{2x^2} &= \frac{1}{2} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^8}{240} + o_{x \rightarrow 0}(x^8) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x^4}{12} + o_{x \rightarrow 0}(x^7)\end{aligned}$$